Correction examen du baccalauréat section Mathématiques session principale 2021

Une correction possible proposée par Kooli Mohamed Hechmi

Exercice 1

1) a) Dans le triangle OBC rectangle en C, on a :

$\sin(\widehat{OBC}) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{2}$ alors $OB = 2OC$ par suite $2IB = 2OD$ donc $IB = OD = 1 \neq 0$

alors il existe un unique déplacement f qui transforme O en I et D en B.

b) Soit α l'angle de f alors $\alpha \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{IB}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

alors f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$

c) On a Ω est le centre de f alors $med[OI] \cap med[DB] = \{\Omega\}$

d'où la construction de Ω.

2) a) On g est un antidéplacement alors g est soit une symétrie axiale soit une symétrie glissante et comme $med[OI] \neq med[DB]$ alors g est une symétrie glissante.

b) Soit Δ l'axe de g, on $g(O) = I$ et $g(D) = B$ alors $O * I = J \in \Delta$ et $D * B = K \in \Delta$

par suite $\Delta = (JK)$.

On pose $g(E) = E'$ et on a $g(O) = I$ et $g(D) = B$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{E'I}, \overrightarrow{E'B}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{ED}}\right)[2\pi] \equiv -\pi[2\pi]$

par suite $E' \in (IB)$ d'autre part $E \in (JK)$ alors $E' \in (JK)$ donc $E' \in (JK) \cap (IB) = \{J\}$

alors $g(E) = J$.

c) Soit $\vec{u}$ le vecteur de g alors $g = t_{\vec{u}}\ o\ S_{(JK)} = S_{(JK)}\ o\ t_{\vec{u}}$

$g(E) = t_{\vec{u}}\ o\ S_{(JK)}(E) = t_{\vec{u}}(E) = J$ $E \in (JK)$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{EJ}$ par suite $g = t_{\overrightarrow{EJ}}\ o\ S_{(JK)} = S_{(JK)}\ o\ t_{\overrightarrow{EJ}}$

3) a) On $f^{-1}\ o\ g(O) = f^{-1}(g(O)) = f^{-1}(I) = O$ car $f(O) = I$

d'autre part $f^{-1}\ o\ g(D) = f^{-1}(g(D)) = f^{-1}(B) = D$ car $f(D) = B$

$S_{(OA)}(O) = O$ et $S_{(OA)}(D) = D$ car $D \in (OA)$

alors $f^{-1}\ o\ g(O) = S_{(OA)}(O)$ et $f^{-1}\ o\ g(D) = S_{(OA)}(D)$

On a $f^{-1}\ o\ g$ est la composé d'un antidéplacement et d'un déplacement alors $f^{-1}\ o\ g$ est un antidéplacement et on a $S_{(OA)}$ est un antidéplacement

$f^{-1}\ o\ g$ et $S_{(OA)}$ coïncides en deux points distincts alors $f^{-1}\ o\ g = S_{(OA)}$.

$f^{-1}\ o\ g = S_{(OA)} \Rightarrow f\ o\ f^{-1}\ o\ g = f\ o\ S_{(OA)} \Rightarrow g = f\ o\ S_{(OA)}$

on a $g(E) = J$ alors $f\ o\ S_{(OA)}(E) = J$ alors $f\left(S_{(OA)}(E)\right) = J$ donc $f(E) = J$

b) On a $g(E) = J$ et $g(O) = I$ alors $OE = IJ$ (tout antidéplacement conserve les distances)

et $J = O * I$ alors $OJ = IJ$

conclusion $OE = OJ$.

on a $OE = OJ$ donc $O \in med[EJ]$

on a $f(E) = J$ alors $\Omega E = \Omega J$ donc $\Omega \in med[EJ]$

par suite $(O\Omega) = medmed[EJ]$ donc $(O\Omega)\perp(EJ)$ or $K \in (EJ)$

alors $(O\Omega)\perp(JK)$

4) a) On $OI = 1$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OI}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ alors

$$\begin{cases} OI = 1 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OI}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow z_I = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

b) On a $\begin{cases} OB = 2OC = 2 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow z_B = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

On a $z_D = 1$

on a $K = B * D$ alors $z_K = \frac{z_B+z_D}{2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}+1}{2}$

on a $J = O * I$ alors $z_J = \frac{z_O+z_I}{2} = \frac{z_I}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{2}$

$$z_K - z_J = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}+1}{2} - \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}+1}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i0}}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_K - z_J = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$$

c) On a $\left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{JK}}\right) \equiv arg\left(\frac{z_K-z_J}{z_D-z_O}\right)[2\pi] \equiv arg(z_K - z_J) - arg(z_D)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

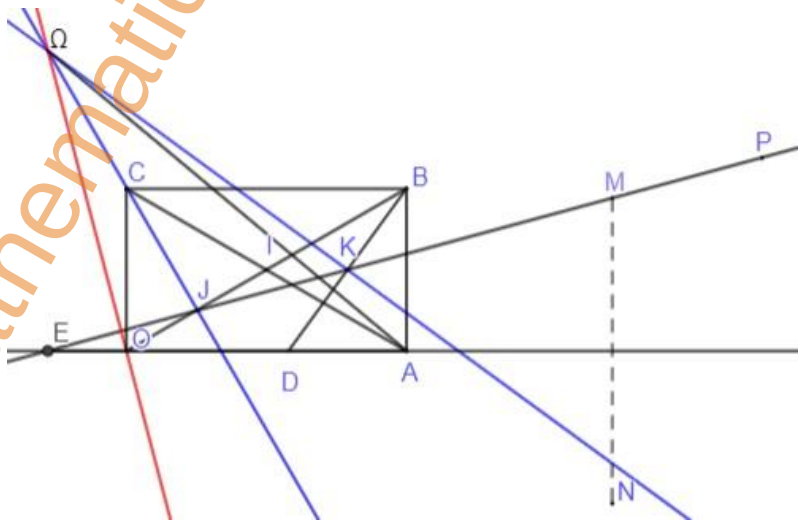
$$\left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{JK}}\right) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$$

5) a) On $S_{(OA)}(M) = N$ et $E \in (OA)$ alors $EM = EN$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EN}}\right) \equiv -2\left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{JK}}\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

$$\begin{cases} EM = EN \\ \left(\widehat{\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EN}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi] \\ r(E) = E \end{cases} \Leftrightarrow r(M) = N$$

b) On $g = f\ o\ S_{(OA)}$

$g(M) = P \Leftrightarrow f\ o\ S_{(OA)}(M) = P \Leftrightarrow f(N) = P$



Exercice 2

1) a) Pour $n = 0$ on a $21^0 + 20 \times 0 = 1$ donc $21^0 \equiv 1 + 20 \times 0 (mod\ 100)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $21^n \equiv 1 + 20 \times n (mod\ 100)$

montrons que $21^{n+1} \equiv 1 + 20 \times (n+1) (mod\ 100)$

$$\begin{aligned}
21^{n+1} &\equiv 21^n \times 21 (mod\ 100) \\
&\equiv 21(1 + 20 \times n)(mod\ 100) \\
&\equiv 21 + 21 \times 20n (mod\ 100) \\
&\equiv 1 + 20 + (20+1) \times (20n)(mod\ 100) \\
&\equiv 1 + 20 + 20n + 400n (mod\ 100) \\
&\equiv 1 + 20 + 20n (mod\ 100) \quad \text{car } 400n \equiv 0 (mod\ 100) \\
&\equiv 1 + 20 \times (n+1)(mod\ 100)
\end{aligned}$$

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $21^n \equiv 1 + 20 \times n (mod\ 100)$

b) On a $2021 \equiv 21 (mod\ 100)$ ⇨ $2021^{2021} \equiv 21^{2021} (mod\ 100)$ ⇨

$2021^{2021} \equiv 1 + 20 \times 2021 (mod\ 100)$ d'après 1)a)

$2021 \equiv 21 (mod\ 100)$ ⇨ $20 \times 2021 \equiv 20 \times 21 (mod\ 100)$ ⇨ $20 \times 2021 \equiv 420 (mod\ 100)$

⇨ $20 \times 2021 \equiv 20 (mod\ 100)$ ⇨ $1 + 20 \times 2021 \equiv 21 (mod\ 100)$

alors $2021^{2021} \equiv 21 (mod\ 100)$

alors le chiffre des unités de 2021^{2021} est 1 et son chiffre de dizaine est 2

2) On a E est l'ensemble des entiers x vérifiant $x^n \equiv 1 + n(x-1)(mod\ 100)$

d'après 1) a on a $21^n \equiv 1 + 20n (mod\ 100)$ ce qui donne $21^n \equiv 1 + n(21-1)(mod\ 100)$

alors 21 est un élément de E

3) a) On a x est un élément de E alors $x^n \equiv 1 + n(x-1)(mod\ 100)$est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

spécialement pour $n = 2$ alors $x^2 \equiv 1 + 2(x-1)(mod\ 100)$, $x^2 \equiv 1 + 2x - 2 (mod\ 100)$

$x^2 - 2x + 1 \equiv 0 (mod\ 100)$, $(x-1)^2 \equiv 0 (mod\ 100)$

b) On a $(x-1)^2 \equiv 0 (mod\ 100)$ alors il existe un entier k tel que $(x-1)^2 = 100k = 10(10k)$

alors $(x-1)^2 \equiv 0 (mod\ 10)$

Soit a un entier, déterminons le reste modulo 10 de a^2

Reste modulo 10 de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste modulo 10 de a^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

alors $a^2 \equiv 0(mod\ 10)$ si et seulement si $a \equiv 0(mod\ 10)$

par suite $(x-1)^2 \equiv 0(mod\ 10)$ si et seulement si $x-1 \equiv 0(mod\ 10)$ alors $x \equiv 1(mod\ 10)$

4) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1+10q)^n = C_n^0 1^n \times (10q)^0 + C_n^1 1^{n-1} \times (10q)^1 + C_n^2 1^{n-2} \times (10q)^2 + \cdots + C_n^n 1^0 \times (10q)^n$$

$$= 1 + 10qC_n^1 + (10q)^2 C_n^2 + (10q)^3 C_n^3 + \cdots + (10q)^n C_n^n$$

$$= 1 + 10qC_n^1 + 10^2 \times q^2 C_n^2 + 100^3 \times q^3 C_n^3 + \cdots + 100^n \times q^n$$

$$= 1 + 10nq + 100q^2 C_n^2 + 100 \times 100^2 q^3 \times C_n^3 + \cdots 100 \times 100^{n-1} q^n$$

$$= 1 + 10nq + 100(q^2 C_n^2 + 100^2 q^3 C_n^3 + \cdots + 100^{n-1} q^n)$$

on a $100(q^2 C_n^2 + 100^2 q^3 C_n^3 + \cdots + 100^{n-1} q^n) \equiv 0(mod\ 100)$

alors $1 + 10nq + 100(q^2 C_n^2 + 100^2 q^3 C_n^3 + \cdots + 100^{n-1} q^n) \equiv 1 + 10nq(mod\ 100)$

par suite $(1+10q)^n \equiv 1 + 10nq(mod\ 100)$

5) On a $x \in E \Rightarrow x \equiv 1(mod\ 10) \Rightarrow x = 1 + 10q\ ,\ q \in \mathbb{Z}$

$\forall n \in \mathbb{N}\ (1+10q)^n \equiv 1 + 10nq(mod\ 100)$

$$\equiv 1 + (1 + 10q - 1)n(mod\ 100)$$

alors $1 + 10q$ est un élément de E

l'ensemble des solutions de E de la forme $+10q\ ,\ q \in \mathbb{Z}$

Exercice 3

1) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à ($\mathcal{C}$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à ($\mathcal{C}$) au voisinage de $+\infty$

b) On a pour tout $x > 0$; $\varphi'(x) = \left(\frac{1+\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1+\ln x)}{x^2} = \frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$

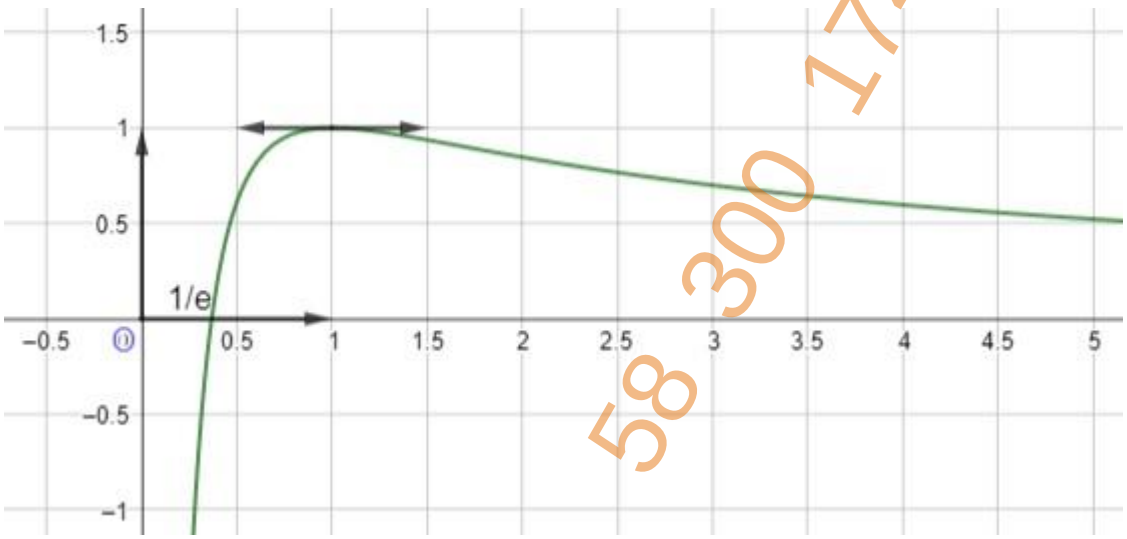
c) On a pour tout $x > 0$; $\varphi'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ alors $\varphi'(x)$ prend le signe de $-\ln x$ sur $]0\ ,+\infty[$

$\varphi'(x) = 0\ ,\ x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$		$-$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

d) On a $M(x,y) \in (O,\vec{\imath}) \cap (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ alors le point $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ est le point d'intersection de ($\mathcal{C}$) et l'axe des abscisses.

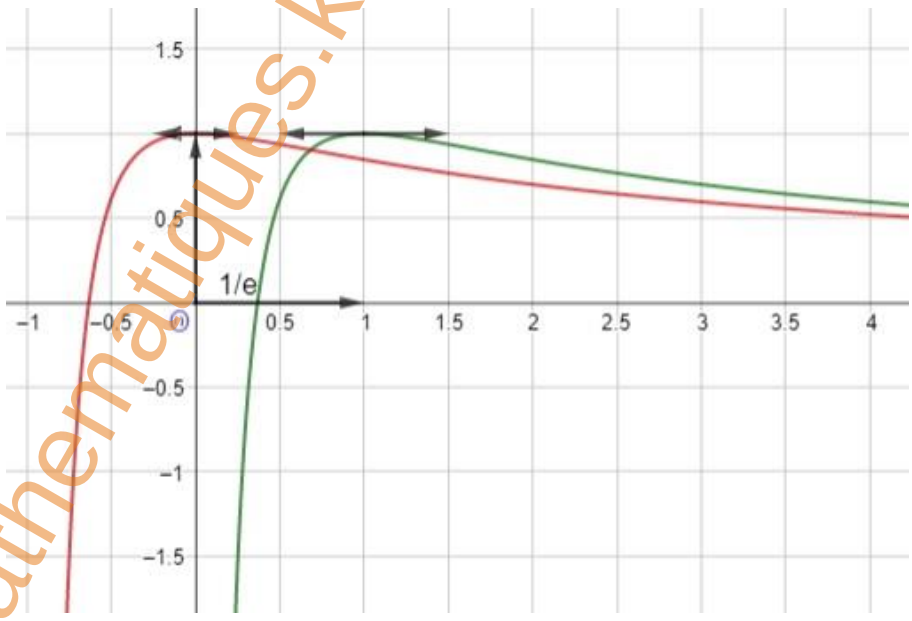


2) a) On a pour tout $\in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n(x) = \frac{1+\ln(x+n)}{x+n}$ $x \in]-n, +\infty[$

$= \varphi(x+n)$ tel que $x + n > 0$

$M(x, \varphi(x)) \in (\mathcal{C})$, $M'(x, \varphi_n(x)) \in (\mathcal{C}_n)$ alors $M' = t_{-n\vec{\imath}}(M)$ par suite ($\mathcal{C}_n$) est l'image de ($\mathcal{C}$) par la translation de vecteur $-n\vec{\imath}$ **(notion vue en deuxième année)**

b) On a ($\mathcal{C}_1$) est l'image de ($\mathcal{C}$) par la translation de vecteur $-\vec{\imath}$



3) a) On a pour tout > 0 , $h_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi(x)$

pour tout ≥ 1 , $h_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi(x) = \varphi(x+n) - \varphi(x)$

on a $x+n \geq x$ or la fonction φ est décroissante sur $[1\,,+\infty[$ alors $\varphi(x+n) < \varphi(x)$ donc

$\varphi(x+n) - \varphi(x) < 0$ par suite $h_n(x) < 0$

b) On a pour tout $x \in]0\,,1]$, $h'_n(x) = \varphi'_n(x) - \varphi'(x) = -\frac{\ln(x+n)}{(x+n)^2} + \frac{\ln x}{x^2}$

or $x \in]0\,,1]$ et $x+n > 1$ alors $\ln x \leq 0$ et $\ln(x+n) > 0$ donc pour tout $x \in]0\,,1]$ $h'_n(x) < 0$

b) * Sur l'intervalle $[1\,,+\infty[$ on a $h_n(x) < 0$ alors l'équation $h_n(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[1\,,+\infty[$

* On a h_n est continue et strictement décroissante sur $]0\,,1]$ donc h_n réalise une bijection de $]0\,,1]$ sur $h_n(]0\,,1]) = [\,h_n(1), +\infty[$ et comme $h_n(1) < 0$ (d'apres **3) a)**)

alors $0 \in [\,h_n(1), +\infty[$ par suite l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $]0\,,1]$

conclusion l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $]0\,,+\infty]$

$h_n\left(\frac{1}{e}\right) > 0$ et $h_n(1) > 0$ alors $h_n\left(\frac{1}{e}\right) \times h_n(1)$ donc $\frac{1}{e} < \alpha_n < 1$

4) a) On a $\frac{1}{e} < \alpha_{n+1} < 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{e} < 1 + \alpha_{n+1} < 2 \Rightarrow 1 + \alpha_{n+1} > 1 + \frac{1}{e}$ (1)

et on a $\frac{1}{e} < \alpha_n < 1 \Rightarrow \alpha_n < 1$ (2)

de (1) et (2) $1 + \alpha_{n+1} > \alpha_n \Rightarrow n + 1 + \alpha_{n+1} > n + \alpha_n$

b) On a $n + 1 + \alpha_{n+1} > n + \alpha_n > 1$ et la fonction φ est décroissante sur $[1\,,+\infty[$ alors on a

$\varphi(n+1+\alpha_{n+1}) < \varphi(n+\alpha_n)$ or $\varphi(x+n) = \varphi_n(x)$ alors $\varphi(n+1+\alpha_{n+1}) = \varphi_{n+1}(\alpha_{n+1})$

donc $\varphi_{n+1}(\alpha_{n+1}) < \varphi_n(\alpha_n)$ (3)

d'autre part $h(\alpha_n) = \varphi_n(\alpha_n) - \varphi(\alpha_n) = 0$ ce qui donne $\varphi_n(\alpha_n) = \varphi(\alpha_n)$

donc $\varphi_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \varphi(\alpha_{n+1})$

l'inégalité (3) devient $\varphi(\alpha_{n+1}) < \varphi(\alpha_n)$

c) On $\varphi(\alpha_{n+1}) < \varphi(\alpha_n)$ on a α_n et α_{n+1} sont dans l'intervalle $]0\,,1]$ et la fonction φ est strictement croissante sur $]0\,,1]$ donc $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ alors la suite (α_n) est ,décroissante et minorée par $\frac{1}{e}$ alors la suite (α_n) est convergente et converge vers une limite ℓ.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\ln(n+\alpha_n)}{n+\alpha_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\alpha_n} + \frac{\ln(n+\alpha_n)}{n+\alpha_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n + \alpha_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\alpha_n} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+\alpha_n)}{n+\alpha_n} = 0$

par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\alpha_n) = 0$

la suite (α_n) converge vers une limite ℓ , φ est continue en ℓ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\alpha_n) = \varphi(\ell) = 0$

donc $1 + ln(\ell) = 0$, $ln(\ell) = -1$, $\ell = \frac{1}{e}$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{e}$

Exercice 4

1) $F(x) = \int_1^x e^{-\sqrt{t}}\, dt$ et $H(x) = \frac{4}{e} - 2(1+\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}$ $x \in \mathbb{R}_+$

a) $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $1 \in \mathbb{R}_+$ alors $x \mapsto F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $F'(x) = e^{-\sqrt{x}}$

b) Soit la fonction U définie sur $]0, +\infty[$ par : $U(x) = F(x) - H(x)$

U est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $U'(x) = (F(x) - H(x))' = e^{-\sqrt{x}} - \left(\frac{4}{e} - 2(1+\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}\right)'$

$$= e^{-\sqrt{x}} + 2\left((1+\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}\right)'$$

$$= e^{-\sqrt{x}} + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})\right)$$

$$= e^{-\sqrt{x}} + \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} = 0$$

donc $U(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ or $U(1) = F(1) - H(1) = 0$ alors $c = 0$ par suite $F(x) - H(x) = 0$ si $x > 0$

conclusion $\forall x > 0$ $F(x) = H(x)$

on a F et H sont continues sur $\mathbb{R}_+$ donc F et H sont continues à droite en 0

$\lim\limits_{x\to0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to0^+} H(x) = H(0)$ par suite $F(0) = H(0)$

2) $G(x) = \int_1^x \sqrt{t}e^{-\sqrt{t}}\, dt$ $x \in [0, +\infty[$

a) soit $t > 0$ $G(x) = \int_1^x \sqrt{t}e^{-\sqrt{t}}\, dt = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}\, dt = -2\int_1^x t \times \left(\frac{-1}{2\sqrt{t}}\right)e^{-\sqrt{t}}\, dt$

on pose $U(t) = t$ $U'(t) = 1$

$V'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}$ $V(t) = e^{-\sqrt{t}}$

$$G(x) = -2\left(\left[te^{-\sqrt{t}}\right]_1^x - \int_1^x e^{-\sqrt{t}}\, dt\right) = -2\left(\left[te^{-\sqrt{t}}\right]_1^x - \int_1^x e^{-\sqrt{t}}\, dt\right)$$

$$= -2\left(xe^{-\sqrt{x}} - e^{-1} - \int_1^x e^{-\sqrt{t}}\, dt\right) = -2\left(xe^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{e} - F(x)\right)$$

$$= \frac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + 2F(x)$$

alors pour tout $x > 0$ on a $G(x) = \frac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + 2F(x)$

b) les fonctions G et F sont continues à droite en 0

alors $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = G(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + 2F(x)$ alors $G(0) = \frac{2}{e} + 2F(0)$

3) a) $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ et $g(x) = \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$ pour $x \in [0\,,+\infty[$

$$A_1 = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,dx - \int_0^1 \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

$$= -\int_1^0 e^{-\sqrt{x}}\,dx + \int_1^0 \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

$$= -F(0) + G(0) = \frac{2}{e} + F(0) = \frac{2}{e} + H(0) = \frac{2}{e} + \frac{4}{e} - 2 = \frac{6}{e} - 2$$

alors $A_1 = \frac{6}{e} - 2\ ua$

b) Soit $\lambda > 1$

$$A_\lambda = \int_0^\lambda |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx + \int_1^\lambda |f(x) - g(x)|\,dx$$

$$= \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx + \int_1^\lambda (g(x) - f(x))\,dx$$

$$= A_1 + \int_1^\lambda \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx - \int_1^\lambda e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

$$= A_1 + G(\lambda) - F(\lambda)$$

c) $A_\lambda = A_1 + G(\lambda) - F(\lambda) = \frac{6}{e} - 2 + \frac{2}{e} - 2\lambda e^{-\sqrt{\lambda}} + H(\lambda)$

or d'après 2) c) $G(x) = \frac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + 2F(x)$ d'où $G(x) - F(x) = \frac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + F(x)$ avec $x > 0$

par suite $A_\lambda = \frac{6}{e} - 2 + \frac{2}{e} - 2\lambda e^{-\sqrt{\lambda}} + F(\lambda)$

$= \frac{8}{e} - 2 - 2\lambda e^{-\sqrt{\lambda}} + H(\lambda)$ car pour tout $x > 0$, $F(X) = H(x)$

$= \frac{8}{e} - 2 - 2\lambda e^{-\sqrt{\lambda}} + \frac{4}{e} - 2\left(1 + \sqrt{\lambda}\right)e^{-\sqrt{\lambda}} = \frac{12}{e} - 2 + -2\lambda e^{-\sqrt{\lambda}} - 2e^{-\sqrt{\lambda}} - 2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}}$

$= \frac{12}{e} - 2 - 4\lambda e^{-\sqrt{\lambda}} - 2e^{-\sqrt{\lambda}}$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{12}{e} - 2 \underbrace{-4\lambda e^{-\sqrt{\lambda}} - 2e^{-\sqrt{\lambda}}}_{0}$$

donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = \frac{12}{e} - 2$