Correction examen du baccalauréat section Mathématiques session contrôle 2022

Une correction possible proposée par Kooli Mohamed Hechmi

Exercice 1

1) On a : $R = S_{(OE)} \circ R_{(OB)}$

a) on a $(OE) \cap (OB) = \{O\}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}$

alors R est la rotation de centre O et d'angle $2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3}$

R est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

b) Le tringle OFE est rectangle en E et $\left(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FO}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et comme $I \in [OF]$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OI}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ (1)

Le tringle OFE est rectangle en E et $I = O * F$ alors $IO = IF = IE$ (2)

de (1) et (2) le triangle OEI est équilatéral indirect donc $\begin{cases} OE = OI \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OI}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ d'où $R(E) = I$

2) $h = h_{(O,2)}$ $f = h \circ R$

a) $f(E) = h \circ R(E) = h(I)$ or $OF = 2OI$ alors $h(I) = F$ donc $f(E) = F$

b) On a f est la composée d'une homothétie de centre O et de rapport , et d'une rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ alors f est une similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

3) a) On a $(OA) = med\ [IE]$ donc (OA) est la bissectrice intérieure de $\widehat{EOI}$

par suite $\left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

le triangle OAB est rectangle en B alors $\frac{OA}{OB} = \frac{1}{\frac{OB}{OA}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$\begin{cases} OA = 2OB \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ alors $f(B) = A$

b) On a $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ or le triangle OAB est rectangle en B alors $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et comme $E \in [AB]$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AO}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

on a d'après $\left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

par suite $\left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}}\right)\ [2\pi]$ alors le tringle AEO est isocèle en E par suite $EA = EO$

On a $\begin{cases} f(B) = A \\ f(E) = F \end{cases}$ ⇨ $AF = 2BE$ (1)

on OBE rectangle en B alors $\frac{BE}{OE} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ donc $OE = 2BE$ (2)

de (1) et (2) $AF = OE$ alors $AF = AE$

de plus on a $IO = IE = IF$ donc $IE = EF = AF = AE$ par suite $AEIF$ est un losange

4) on a g est une similitude indirecte $g(B) = A$, $g(E) = F$ et $g(F) = K$

a) On a $g(B) = f(B) = A$ et $g(E) = f(E) = F$ alors g et f ont le même rapport

alors le rapport de g est 2

b) On $AEIF$ est un losange alors $\left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EF}}\right)\ [2\pi]$

c) On $\begin{cases} g(B) = A \\ g(E) = F \\ g(F) = K \end{cases}$ et g est une similitude indirecte alors $\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FK}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF}}\right)\ [2\pi]$

$E \in [AB]$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{EF}}\right)\ [2\pi]$

$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EF}}\right) + \pi[2\pi]$$

$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}\right) + \pi[2\pi] \qquad 4)\ b)$$

par suite $\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FK}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}\right) + \pi[2\pi]$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FK}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}\right) \equiv \pi[2\pi]$

d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FK}}\right) \equiv \pi[2\pi]$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FK}}\right) \equiv \pi[2\pi]$

les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{FK}$ sont collinaires et de sens contraire alors $F \in [EK]$

d) On a g est une similitude indirecte de centre Ω et de rapport 2 donc $g\ o\ g = h_{(\Omega,4)}$

$g\ o\ g(E) = g(F) = K$ ⇨ $\overrightarrow{\Omega K} = 4\overrightarrow{\Omega E}$ ⇨ $\overrightarrow{\Omega K}$ et $\overrightarrow{\Omega E}$ sont collinaires et de même sens

⇨ $\Omega \in (EK)\backslash[EK]$ ⇨ or $(EK) = (EF)$ alors $\Omega \in (EF)\backslash[EF]$

c) On a $g(E) = F$ donc l'axe de g est porté par la bissectrice intérieure de $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega E},\overrightarrow{\Omega F}}\right)$

or $\Omega \in (EF)\backslash[EF]$ alors l'axe de g est la droite (EF)

c) On a $g(E) = F$ ⇨ $\Omega F = 2\Omega E$ ⇨ $E = \Omega * F$ d'où la construction de Ω.

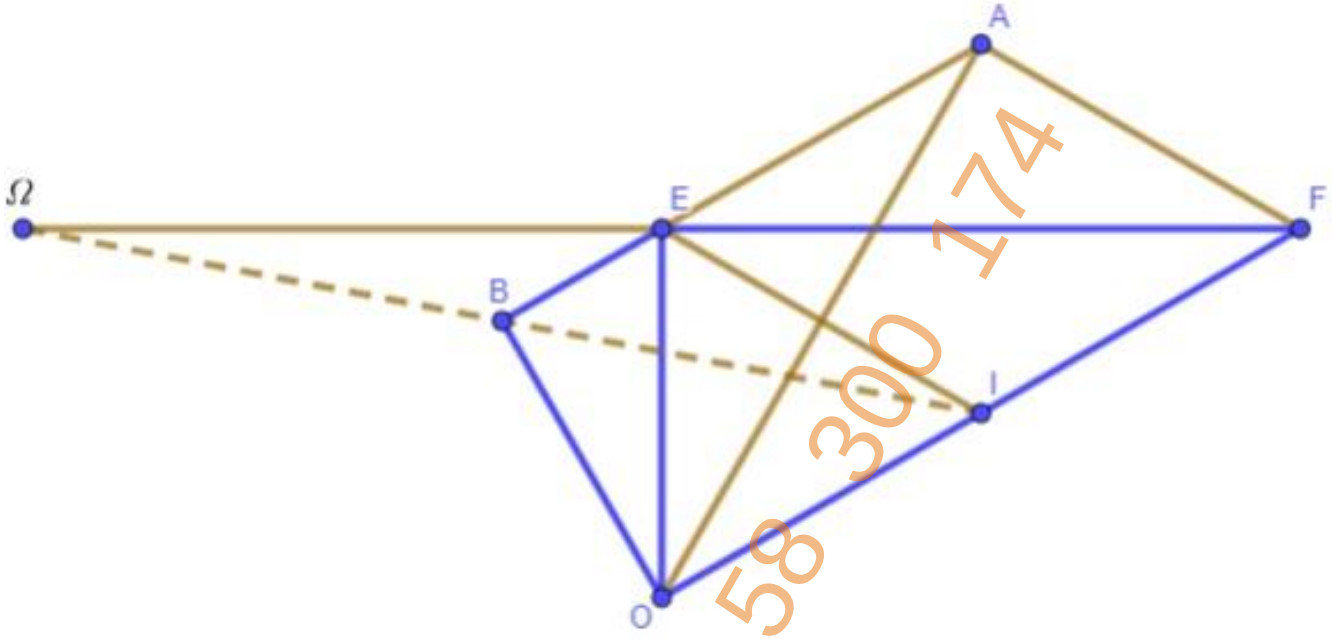
5) a) On a $g = h_{(\Omega,4)}\ o\ S_{(EF)}$ et on a $AEIF$ est un losange donc $S_{(EF)}(I) = A$

posons $g(I) = I'$ donc $g(I) = h_{(\Omega,4)}\ o\ S_{(EF)}(I) = h_{(\Omega,4)}(A) = I'$ d'où $I' \in (\Omega A)$ alors $g(I) \in (\Omega A)$ or

$g(\Omega) = \Omega$ alors $g(\Omega I) = (\Omega A)$

b) Supposons que Ω , B et I ne sont pas alignés alors $g(\Omega) = \Omega$, $g(B) = A$ et $g(I)$ ne sont pas alignés or $g(I) \in (\Omega A)$ donc $g(\Omega) = \Omega$, $g(B) = A$ et $g(I)$ sont alignés ce qui absurde

alors Ω , B et I sont alignés



Exercice 2

1) a) On a : $p(A) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

b) $p(B) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{2\times3+1}{10} = \frac{7}{10}$

autrement

Soit $\overline{B}$ « aucune boule numéroté 0 n'est tirée » $p(\overline{B}) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$

$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

2) a) On a $X(\Omega) = \{-2\,,-1\,,0\,,2\}$

$p(X=-2) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$, $p(X=-1) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$, $p(X=0) = \frac{7}{10}$ et $(X=2) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

d'où la loi de probabilité de X

x_i	-2	-1	0	2	total
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

b) On $E(X) = \sum x_i\, p_i = \frac{-2}{10} + \frac{-1}{10} + 0 + \frac{2}{10} = \frac{-1}{10}$

$E(X) = \frac{-1}{10}$

3) a) La variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{7}{10}$

$p(Y=1) = C_n^1 \times \frac{7}{10} \times \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} = \frac{7n}{10} \times \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

$p(Y=1)=\frac{7n}{10}\times\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

b) On $p(Y)\geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad n\times\frac{7}{10}\geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad n\geq\frac{10}{7}\times 5 \quad \Leftrightarrow \quad n\geq\frac{50}{7}\simeq 7,14$

alors la plus petite valeur de n tel que $p(Y)\geq 5$ et $n=8$

Exercice 3

Partie A

1) On a : p est premier , $p\geq 3$ et $p\equiv 2(mod\ 3)$ $\quad (E_p):\ x^3\equiv 1(mod\ p)$

$x\equiv 1(mod\ p) \Rightarrow x^3\equiv 1^3(mod\ p)$ donc $x^3\equiv 1(mod\ p)$ d'où x est solution de (E_p).

2) a) Supposons que p divise x alors $x\equiv 0(mod\ p)$ donc $x^3\equiv 0(mod\ p)$

absurde car $x^3\equiv 1(mod\ p)$ donc p ne divise pas x et comme p est premier alors d'après Fermat

$x^{p-1}\equiv 1(mod\ p)$

b) On x est solution de $(E_p) \Rightarrow x^{p-1}\equiv 1(mod\ p)$ et on a $p\equiv 2(mod\ 3)$ alors il existe $k\in\mathbb{Z}^*$

(car $p\geq 3$) tel que $p=3k+2$ par suite $x^{3k+2-1}\equiv 1(mod\ p) \Rightarrow x^{3k+1}\equiv 1(mod\ p)$

$\Rightarrow x^{3k}\times x\equiv 1(mod\ p) \Rightarrow (x^3)^k\times x\equiv 1(mod\ p)$

or $x^3\equiv 1(mod\ p) \Rightarrow (x^3)^k\equiv 1(mod\ p) \Rightarrow (x^3)^k\times x\equiv x(mod\ p)$ par suite $x\equiv 1(mod\ p)$

3) On a x est solution de $(E_p) \Rightarrow x\equiv 1(mod\ p)$ alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=1+pk$

$S_{\mathbb{Z}}=\{1+pk\ ,k\in\mathbb{Z}\}$

Partie B

1) On a $(E_{43}):\ x^3\equiv 1(mod\ 43) \Rightarrow x^3-1\equiv 0(mod\ 43) \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)\equiv 0(mod\ 43)$

$\Rightarrow (x-1)\equiv 0(mod\ 43)$ ou $x^2+x+1\equiv 0(mod\ 43)$

2) a) $(2x+1)^2+3=4x^2+4x+1+3=4(x^2+x+1)$

$30^2=900=21\times 43-3$ donc $30^2\equiv -3(mod\ 43)$

b) On a $x^2+x+1\equiv 0(mod\ 43) \Leftrightarrow 4(x^2+x+1)\equiv 0(mod\ 43) \Leftrightarrow (2x+1)^2+3\equiv 0(mod\ 43)$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2\equiv -3(mod\ 43)$

c) On a $x^2+x+1\equiv 0(mod\ 43) \Rightarrow (2x+1)^2\equiv -3(mod\ 43) \Rightarrow (2x+1)^2\equiv 30^2(mod\ 43)$ **2) a)**

$\Rightarrow (2x+1)^2-30^2\equiv 0(mod\ 43) \Rightarrow (2x+1-30)(2x+1+30)\equiv 0(mod\ 43)$

$\Rightarrow (2x-29)(2x+31)\equiv 0(mod\ 43)$

$\Rightarrow 2x-29\equiv 0(mod\ 43)$ ou $2x+31\equiv 0(mod\ 43)$

3) a) On a $22\times 2=44=43+1$ alors $22\times 2\equiv 1\ (mod\ 43)$

par suite 22 est inverse de 2 modulo 43

b) On a d'après **2) b)** x est solution de (E_{43}) alors $x\equiv 1(mod\ 43)$

On a d'après 2) c) x est solution de (E_{43}) alors $2x-29\equiv 0(mod\ 43)$ ou alors $2x+31\equiv 0(mod\ 43)$

x est solution de (E_{43}) alors x est solution de (E_{43}) ssi $x\equiv 1(mod\ 43)$ ou $2x-29\equiv 0(mod\ 43)$ ou $2x+31\equiv 0(mod\ 43)$

* $x\equiv 1(mod\ 43)\ \Leftrightarrow\ x=43k+1\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

* $2x-29\equiv 0(mod\ 43)\Leftrightarrow\ 2x\equiv 29(mod\ 43)\Leftrightarrow\ 2\times 22x\equiv 22\times 29(mod\ 43)$

$\Leftrightarrow\ x\equiv 22\times 29(mod\ 43)$ (car $22\times 2\equiv 1\ (mod\ 43)$)$\Leftrightarrow\ x\equiv 22\times 29(mod\ 43)$

$\Leftrightarrow x\equiv 14\times 43+36(mod\ 43)\Leftrightarrow\ x\equiv 36(mod\ 43)\Leftrightarrow\ x=43k+36\ ,k\in\mathbb{Z}$

* $2x+31\equiv 0(mod\ 43)\Leftrightarrow 2x\equiv -31(mod\ 43)\Leftrightarrow 2x\equiv 12(mod\ 43)$

$\Leftrightarrow\ 22\times 2x\equiv 22\times 12(mod\ 43)\ \Leftrightarrow\ x\equiv 22\times 12(mod\ 43)\Leftrightarrow\ x\equiv 6\times 43+6(mod\ 43)$

$\Leftrightarrow\ x\equiv 6(mod\ 43)\Leftrightarrow x=43k+6\ ,k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{Z}}=\{43k+1\ ,43k+36,43k+6\ \ k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 4

$f(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Partie A

1) On a $x\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ -x\in\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(-x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}=\frac{e^{2x}\times e^{-x}}{e^{2x}(1+e^{-2x})}=\frac{e^x}{1+e^{2x}}=f(x)$ alors f est paire

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}(e^{-2x}+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{1}^{0}}{\underbrace{e^x}_{+\infty}\left(\underbrace{e^{-2x}+1}_{1}\right)}=0$

alors la droite d'équation y=0 est une asymptote horizontale à ($\mathcal{C}$) au voisinage de $+\infty$

3) a) $\forall x\in\mathbb{R}$;

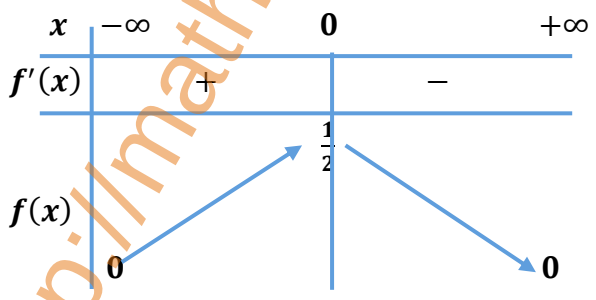
$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)'=\frac{e^x(1+e^{2x})-2e^{2x}\times e^x}{(1+e^{2x})^2}=\frac{e^x+e^{3x}-2e^{3x}}{(1+e^{2x})^2}=\frac{e^x-e^{3x}}{(1+e^{2x})^2}=\frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}$$

b) On a $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}$ or $e^x>0$ et $(1+e^{2x})^2>0$

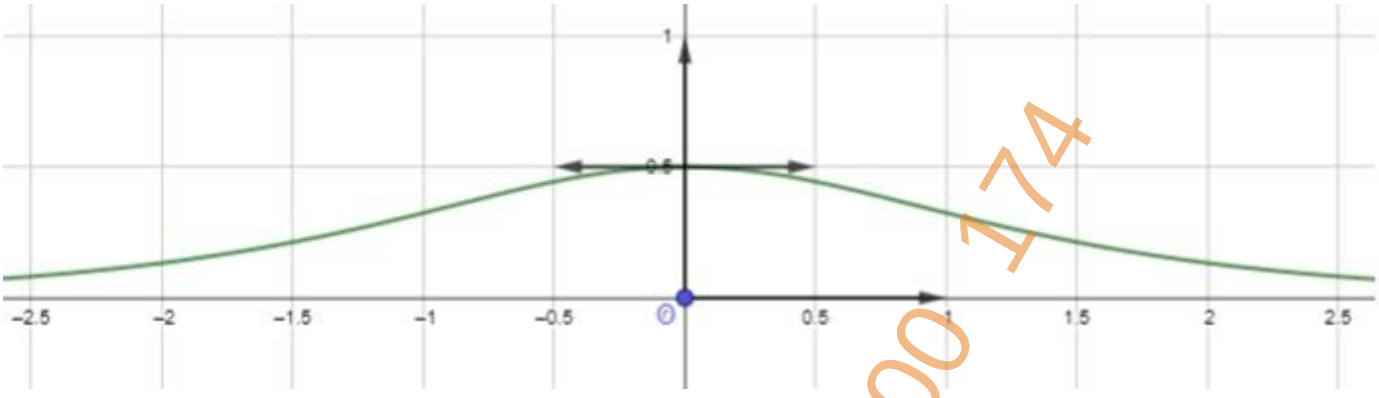
alors $f'(x)$ prend le signe de $1-e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$

$f'(x)\le 0\ \Rightarrow\ 1-e^{2x}\le 0\ \Rightarrow\ e^{2x}\ge 1\ \Rightarrow\ x\ge 0$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et comme f est paire alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$



4)



Partie B

$$F(x) = \int_0^{\ln x} f(t)\ dt \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

1) $x \mapsto \ln x$ **est dérivable sur** $]0\,,+\infty[$ **et** $\forall x \in]0\,,+\infty[$ **on a** $\ln x \in \mathbb{R}$

$t \mapsto f(t)$ **est continue sur** $\mathbb{R}$ **et** $0 \in \mathbb{R}$ **alors** F **est dérivable sur** $]0\,,+\infty]$.

$$\forall x \in]0\,,+\infty] \ , F'(x) = (\ln x)' \times f(\ln x) = \frac{1}{x} \times \frac{e^{\ln x}}{1+e^{2\ln x}} = \frac{1}{x} \times \frac{e^{\ln x}}{1+(e^{\ln x})^2} = \frac{1}{x} \times \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\forall x \in]0\,,+\infty] \ , F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

2) a) $\forall x \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ **on a** $g'(x) = (\tan x)' = 1 + tan^2 x > 0$

g **est continue et strictement croissante sur** $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

alors g **réalise une bijection de** $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ **sur** $g\left(\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[\right) =]0\,,+\infty[$

b) On a $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow g^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

on a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

c) On a g **est dérivable sur** $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ **et** $\forall x \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) \neq 0$

alors g^{-1} **est dérivable sur** $g\left(\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[\right) =]0\,,+\infty[$

$\forall x \in]0\,,+\infty[$, $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

posons pour tout $x \in]0\,,+\infty[$ **et pour tout** $\in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$, $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

$\Leftrightarrow \tan y = x$ **alors** $tan^2 y = x$

par suite $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{1+x^2}$

pour tout $\in]0\,,+\infty[$, $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

3) On a $\forall x \in]0,+\infty[$, $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (g^{-1})'(x) \Rightarrow F(x) = g^{-1}(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

$F(1) = g^{-1}(1) + c$, $F(1) = \int_0^{\ln 1} f(t)\, dt = \int_0^0 f(t) = 0$

par suite $0 = g^{-1}(1) + c$ $\quad c = -g^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $F(x) = g^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}$

4) a) on a f est paire alors $A(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\, dx = 2\int_0^{\lambda} f(x)\, dx = \int_0^{\ln e^{\lambda}} f(x)\, dx = 2F(e^{\lambda})$

$A(\lambda) = 2F(e^{\lambda})$

b) On $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} 2F(e^{\lambda})$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{\lambda} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

alors $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} F(e^{\lambda}) = \frac{\pi}{2}$ par suite $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \frac{\pi}{2}$

Partie C

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *on pose* $I_n = \int_0^1 t^n F(e^t)\, dt$

1) a) On a $\forall x \in]0,+\infty[$, $F(x) = g^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}$ et $\forall x \in]0,+\infty[$ on a $0 < g^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} < g^{-1}(x) - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < F(x) < \frac{\pi}{4} \Rightarrow F(x) < \frac{\pi}{4}$

or $\forall\ t > 0$ on a $e^t > 0$ par suite $F(e^t) < \frac{\pi}{4} \Rightarrow F(e^t) \leq \frac{\pi}{4}$ (1)

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ et $\forall x \geq 1$ $\ln x \geq 0 \Rightarrow \int_0^{\ln x} f(t)\, dt \geq 0 \Rightarrow F(x) \geq 0$

or $\forall t \geq 1$ on a $e^t \geq 0$ donc $F(e^t) \geq 0$ (2)

de (1) et (2) pour tout réel $t \geq 0$ $\quad 0 \leq F(e^t) \leq \frac{\pi}{4}$

b) On a $\forall t \geq 0$ $\quad 0 \leq F(e^t) \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq t^n F(e^t) \leq t^n \times \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 t^n F(e^t)\, dt \leq \int_0^1 t^n \times \frac{\pi}{4}\, dt \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{4}\int_0^1 t^n\, dt \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

2) a) On a: $I_n = \int_0^1 t^n F(e^t)\, dt$

$u(t) = F(e^t)$ $\qquad u'(t) = e^t \times F'(e^t) = e^t \times \frac{1}{1+e^{2t}} = \frac{e^t}{1+e^{2t}} = f(t)$

$v'(t) = t^n$ $\qquad v(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$

$$I_n = \left[\frac{F(e^t)t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} \times \frac{e^t}{1+e^{2t}}\, dt = \frac{F(e)-F(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f(t)\, dt$$

$$= \frac{F(e)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f(t)\, dt$$

b) On a : $nI_n = \frac{n}{n+1}F(e) - \frac{n}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f(t)\, dt$

On a $\forall t \geq 0\,, 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq t^{n+1} f(t) \leq \frac{1}{2} t^{n+1} \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 t^{n+1} f(t)\, dt \leq \frac{1}{2}\int_0^1 t^{n+1}\, dt$

$\Rightarrow\ 0 \leq \int_0^1 t^{n+1} f(t)\, dt \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+2} t^{n+2}\right]_0^1 \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 t^{n+1} f(t)\, dt \leq \frac{1}{2(n+2)}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+2)} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 t^{n+1} f(t)\, dt = 0$

$* \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} F(e) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{1}} F(e) = F(e)$

$* \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f(t)\, dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{1}} \underbrace{\int_0^1 t^{n+1} f(t)}_{0} = 0$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = F(e) = g^{-1}(e) - \frac{\pi}{4}$