Ministére de l'education

Correction d'examen du Baccalauréat

Durée : 3h

Section : Sciences Expérimentales — **Coefficient de l'épreuve : 3**

Correction d'exercice : 1

1 $\Delta = (i+2e^{i\theta})^2 - 4(e^{2i\theta} + ie^{i\theta}) = -1 + 4ie^{i\theta} + 4e^{2i\theta} - 4e^{2i\theta} - 4ie^{i\theta} = -1 = (i)^2$, donc $\delta = i$ est une racine carrée de Δ

$z_1 = \dfrac{i+2e^{i\theta}+i}{2} = i + e^{i\theta}$ et $z_2 = \dfrac{i+2e^{i\theta}-i}{2} = e^{i\theta}$, $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{e^{i\theta}, i+e^{i\theta}\}}$

2 a) On a : $\dfrac{z_A - z_B}{z_B - z_C} = \dfrac{i - i - e^{i\theta}}{i + e^{i\theta} - e^{i\theta}} = \dfrac{-e^{i\theta}}{i} = ie^{i\theta}$

b) A, B et C sont alignés, alors $\dfrac{z_A - z_B}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}^* \Rightarrow ie^{i\theta} \in \mathbb{R}^* \Rightarrow e^{i\theta} \in i\mathbb{R}^* \Rightarrow Re(e^{i\theta}) = 0 \Rightarrow cos(\theta) = 0$,et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ d'où $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2}$

Réciproquement : pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dfrac{z_A - z_B}{z_B - z_C} = ie^{i\frac{\pi}{2}} = -1 \in \mathbb{R}^*$ alors A, B et C sont alignés

pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $\dfrac{z_A - z_B}{z_B - z_C} = ie^{-i\frac{\pi}{2}} = 1 \in \mathbb{R}^*$ alors A, B et C sont alignés

3 a) $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc A , B et C sont non alignés et $z_B = i + e^{i\theta} = z_A + z_C \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{OB}} = Z_{\overrightarrow{OA}} + Z_{\overrightarrow{OC}}$ d'où $OABC$ est un parallélogramme . De plus $|\dfrac{z_A - z_B}{z_B - z_C}| = |ie^{i\theta}| = 1$ donc $AB = BC$ par suite $OABC$ est un losange .

b) On a : $1 + e^{2i\theta} = e^{i\theta}(e^{-i\theta} + e^{i\theta}) = 2cos(\theta)e^{i\theta}$

c) $\mathscr{A}(\theta) = \dfrac{OB \times AC}{2} = \dfrac{|z_B| \times |z_C - z_A|}{2} = \dfrac{|z_C + z_A| \times |z_C - z_A|}{2} = \dfrac{|z_C^2 - z_A^2|}{2} = \dfrac{|e^{i2\theta} + 1|}{2} = \dfrac{|2cos\theta e^{i\theta}|}{2} = |cos\theta| = cos(\theta)$,car $cos\theta > 0, \forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

4 a) $(1 + i\sqrt{3}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $(1 - i) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1 + i\sqrt{3})(1 - i) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}2e^{i\frac{\pi}{3}}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{4}{4}e^{i(\frac{4\pi - 3\pi}{12})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$

c) On a : $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1 + i\sqrt{3})(1 - i) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)) = e^{i\frac{\pi}{12}} = cos(\frac{\pi}{12}) + isin(\frac{\pi}{12})$ d'où $cos(\frac{\pi}{12}) = \sqrt{2}(\dfrac{1 + \sqrt{3}}{4}) = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

d) $\mathscr{A}(\theta) = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = cos(\frac{\pi}{12})$, donc $\theta = \frac{\pi}{12}$

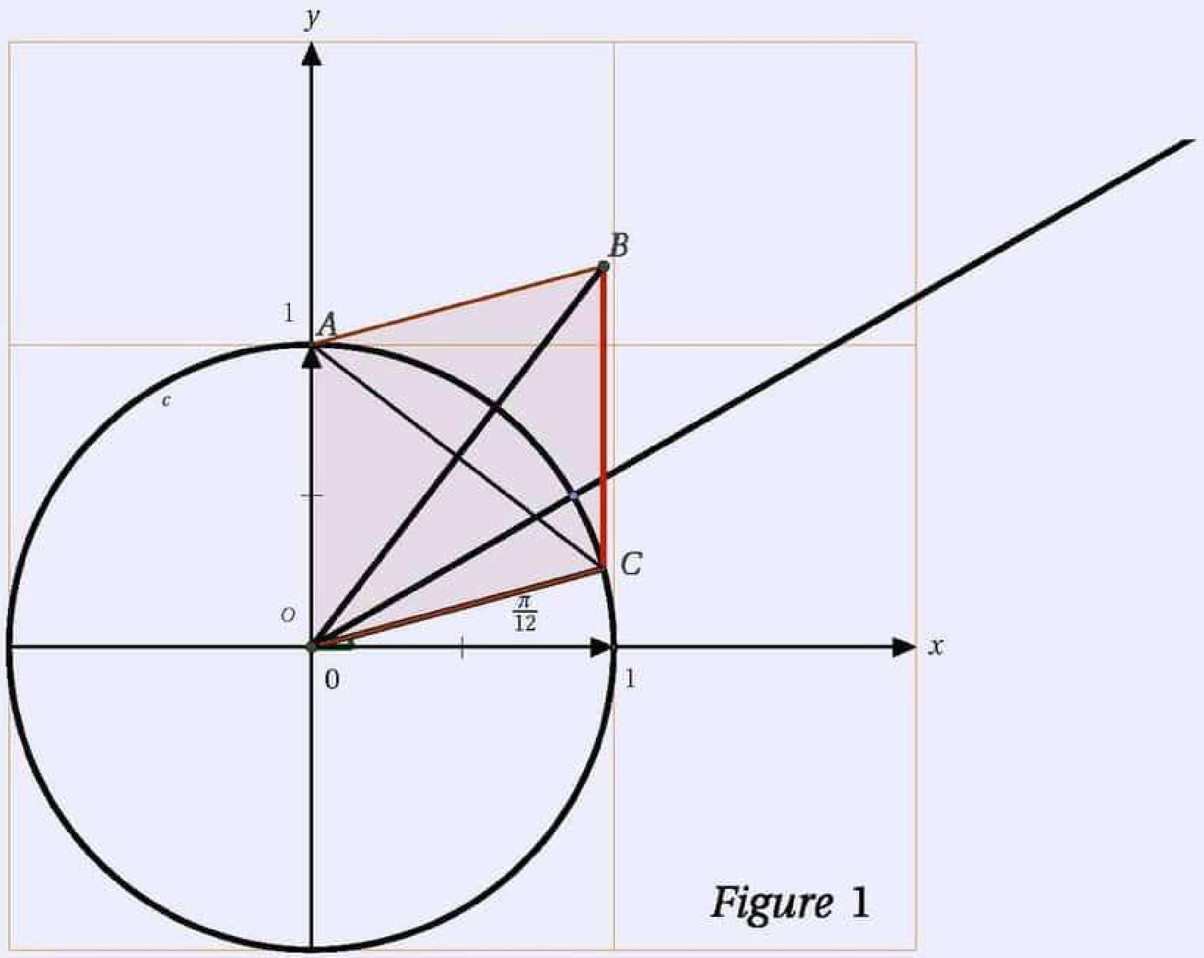


Figure 1

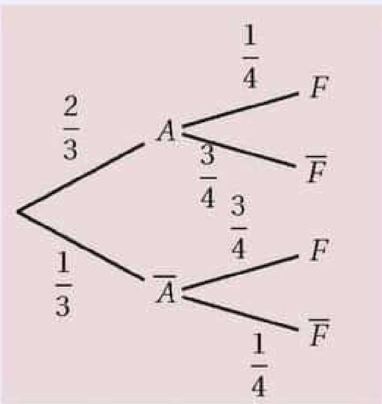
Correction d'exercice : 2

1 On a : $p(F) = p(A \cap F) + p(\overline{A} \cap F) = \frac{5}{12}$
$\Leftrightarrow p(\overline{A} \cap F) = p(F) - p(A \cap F) = \frac{5}{12} - (\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}) =$
$\frac{5}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{4}$

2 On a $p(\overline{A} \cap F) = p(\overline{A}).p(F/\overline{A}) = (1 - \frac{2}{3}).p(F/\overline{A})$

d'où $p(F/\overline{A}) = \frac{p(\overline{A} \cap F)}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

3 L'arbre de probabilité



4 $p(\overline{A}/\overline{F}) = \frac{p(\overline{A} \cap \overline{F})}{p(\overline{F})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{5}{12}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{7}$

Correction d'exercice : 3

1 a $K_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{2}ln1 = \frac{1}{2}ln2$

b pour tout entier $n \geq 1$, $K_{n+2} + K_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1}\,\mathrm{d} + \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x =$

$\frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}(1-0) = \boxed{\frac{1}{n+1}}$

c Pour $n=1$, on a : $K_3 + K_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow K_3 = \frac{1}{2} - K_1 = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln2}$

d pour tout entier $n \geq 1$,$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1+x^2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$
.
Les fonction $x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}$ et $x \mapsto x^n$ sont continues sur $[0,1]$,alors $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$ donc
$\boxed{0 \leq K_n \leq \frac{1}{n+1}}$

e Pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq K_n \leq \frac{1}{n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} K_n = 0}$

2 a On pose : $\begin{cases} u(x) &= ln(1+x^2) \\ v'(x) &= x^n \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u'(x) &= \frac{2x}{1+x^2} \\ v(x) &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$ $I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}.ln(1+x^2)\right]_0^1 -$
$\frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1}\,dx = \frac{ln2}{n+1} - \frac{2}{n+1}K_{n+2}$ d'où

$\boxed{I_n = \frac{ln2}{n+1} - \frac{2}{n+1}K_{n+2}}$,$n \geq 1$

b On a : $\lim_{n\to+\infty} K_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} K_{n+2} = 0$ d'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{ln2}{n+1}}_{0} - \underbrace{\frac{2}{n+1}}_{0}\underbrace{K_{n+2}}_{0} = 0}$

$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n.ln2}{n+1} - \frac{2n}{n+1}K_{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{ln2}{1+\frac{1}{n}}}_{ln2} - \underbrace{\frac{2}{1+\frac{1}{n}}}_{2}\underbrace{K_{n+2}}_{0} = \boxed{ln2.}$

Correction d'exercice : 4

A

1 $u'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. $u'(x) = 0$ signifie $x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$		$\searrow$	$u(-1)$	$\nearrow$	

Donc u est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$ et strictement croissante sur $[-1,+\infty[$

2 D'après le tableau de variation , u admet un minimum absolu en -1 , donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) \geq u(-1) = 1-e^{-1} > 0$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{1+xe^x > 0}$

B

1 a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x + \underbrace{ln(1+\underbrace{xe^x}_{0})}_{0} = \boxed{+\infty}$

b $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x = \lim_{x\to-\infty} ln(1+xe^x) = 0$ d'où $\Delta : y = -x$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $(-\infty)$

c $f(x)+x = ln(1+xe^x) > 0 \Leftrightarrow 1+xe^x > 1 \Leftrightarrow xe^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
De même $f(x)+x = ln(1+xe^x) < 0 \Leftrightarrow 1+xe^x < 1 \Leftrightarrow xe^x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Ainsi si $x>0$ alors : $(\mathscr{C})$ au dessus de $\Delta: y=-x$
Si $x<0$ alors : $(\mathscr{C})$ au dessous de $\Delta: y=-x$
Si $x=0$ alors : $(\mathscr{C})\cap\Delta=\{O(0,0)\}$

2 **a** Pour tout réel x, $f(x)=-x+ln(1+xe^x)=-x+lne^x(e^{-x}+x)=-x+\underbrace{ln(e^x)}_{x}+ln(e^{-x}+x)=ln(x+e^{-x})$.

b $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x+\underbrace{e^{-x}}_{0})=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(x+e^{-x})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln[x(1+\frac{1}{xe^x})]}{x}=\underbrace{\frac{ln(x)}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{ln(1+\frac{1}{xe^x})}{x}}_{0}=0.$$

D'où $(\mathscr{C})$ admet une branche infinie paraboloque de direction celle de $(O,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$

3 **a** Pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}=\dfrac{e^{-x}(e^x-1)}{e^{-x}(xe^x+1)}=\dfrac{e^x-1}{1+xe^x}$

b $f'(x)=0$ donc $e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$; $f'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$ et $f(0)=ln(1)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4 **a** h est continue et strictement croissante sur $]-\infty,0]$ d'où h est bijective de $]-\infty,0]$ sur $h(]-\infty,0])=]-\infty,1]$, $0\in]-\infty,1]$ d'où $h(x)=0$ admet dans $]-\infty,0]$ une solution unique α , $\alpha<0$
h est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ d'où h est bijective de $[0,+\infty[$ sur $h([0,+\infty[)=]-\infty,1]$, $0\in]-\infty,1]$ d'où $h(x)=0$ admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique β , $\beta>0$
Conclusion l'équation $h(x)=0$ admet exactement deux solutions $\alpha<0<\beta$

b Pour tout réel x , $f''(x)=\dfrac{e^x(1+xe^x)-(x+1)e^x(e^x+1)}{(1+xe^x)^2}=\dfrac{e^x(1+xe^x-e^x+1-xe^x+x)}{(1+xe^x)^2}=$
$\dfrac{e^x(x+2-e^x)}{(1+xe^x)^2}=\dfrac{h(x)e^x}{(1+xe^x)^2}$

c Pour tout réel x, $f''(x)=\dfrac{h(x)e^x}{(1+xe^x)^2}$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de $h(x)$ car
$\forall x\in\mathbb{R}, \dfrac{e^x}{(1+xe^x)^2}>0$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	0	-	

Conclusion : les point $A(\alpha,f(\alpha))$ et $B(\beta,f(\beta))$ sont deux points d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C})$

5 **a** **figure 2**

b **figure 2**

6 **a** Pour tout $x\in[1,+\infty[$,$x\le x+e^{-x}$, la fonction ln est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, alors $ln(x)\le ln(x+e^{-x})$ donc $ln(x)\le f(x)$ **(1)**
$x\ge1\Leftrightarrow -x\le-1\Leftrightarrow e^{-x}\le e^{-1}\Leftrightarrow x+e^{-x}\le x+e^{-1}\Leftrightarrow x+e^{-x}\le x(1+\dfrac{e^{-1}}{x})$ et $\dfrac{1}{x}\le1$ d'où $\dfrac{e^{-1}}{x}\le e^{-1}$
,alors $x+e^{-x}\le x(1+\dfrac{e^{-1}}{x})\le x(1+e^{-1})$ par suite $ln(x+e^{-x})\le ln(x(1+\dfrac{e^{-1}}{x}))\le ln(x(1+e^{-1}))$ donc
$f(x)\le lnx+ln(1+e^{-1})$ **(2)**

(1)+(2) : $ln(x)\le f(x)\le ln(x)+ln(1+e^{-1})$

b On a : $\mathscr{A}_\lambda = \int_1^\lambda |f(x)|\,dx = \int_1^\lambda f(x)\,dx$, car $ln(1) = 0 \le ln(x) \le f(x), \forall x \ge 1$

Pour tout $x \in [1,+\infty[$, $ln(x) \le f(x) \le ln(x) + ln(1+e^{-1})$ et les fonctions $x \mapsto ln(x), f$ et $x \mapsto ln(x) + ln(1+e^{-1})$ sont continues sur $[1,\lambda]$ alors

$\int_1^\lambda ln(x)\,dx \le \int_1^\lambda f(x)\,dx \le \int_1^\lambda (ln(x) + ln(1+e^{-1}))\,dx$

Ainsi $[x ln(x) - x]_1^\lambda \le \mathscr{A}_\lambda \le [x ln(x) - x]_1^\lambda + ln(1+e^{-1})\,[x]_1^\lambda$ d'où

$\lambda ln(\lambda) - \lambda + 1 \le \mathscr{A}_\lambda \le \lambda ln(\lambda) - \lambda + 1 + ln(1+e^{-1})(\lambda - 1)$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda ln(\lambda) - \lambda + 1 = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda \underbrace{[ln(\lambda) - 1 + \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{0}]}_{+\infty} = +\infty$ et $\lambda ln(\lambda) - \lambda + 1 \le \mathscr{A}_\lambda$ alors $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathscr{A}_\lambda = +\infty$

On a : $\lambda > 1$ d'où $\lambda ln(\lambda) > 0$ par suite $\frac{\lambda ln(\lambda) - \lambda + 1}{\lambda ln(\lambda} \le \frac{\mathscr{A}_\lambda}{\lambda ln(\lambda)} \le \frac{\lambda ln(\lambda) - \lambda + 1 + ln(1+e^{-1})(\lambda-1)}{\lambda ln(\lambda)}$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda ln(\lambda) - \lambda + 1}{\lambda ln(\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} 1 - \underbrace{\frac{1}{ln(\lambda)}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{\lambda ln(\lambda)}}_{0} = 1$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda ln(\lambda) - \lambda + 1 + ln(1+e^{-1})(\lambda-1)}{\lambda ln(\lambda)} =$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} 1 - \frac{1}{ln(\lambda)} + \frac{1}{\lambda ln(\lambda)} + \frac{ln(1+e^{-1})(\lambda-1)}{\lambda ln(\lambda)} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} 1 - \frac{1}{ln(\lambda)} + \frac{1}{\lambda ln(\lambda)} + \underbrace{\frac{ln(1+e^{-1})(1-\frac{1}{\lambda})}{ln(\lambda)}}_{0} = 1$

et $\frac{\lambda ln(\lambda) - \lambda + 1}{\lambda ln(\lambda} \le \frac{\mathscr{A}_\lambda}{\lambda ln(\lambda)} \le \frac{\lambda ln(\lambda) - \lambda + 1 + ln(1+e^{-1})(\lambda-1)}{\lambda ln(\lambda)}$ alors $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{\mathscr{A}_\lambda}{\lambda ln(\lambda)} = 1$

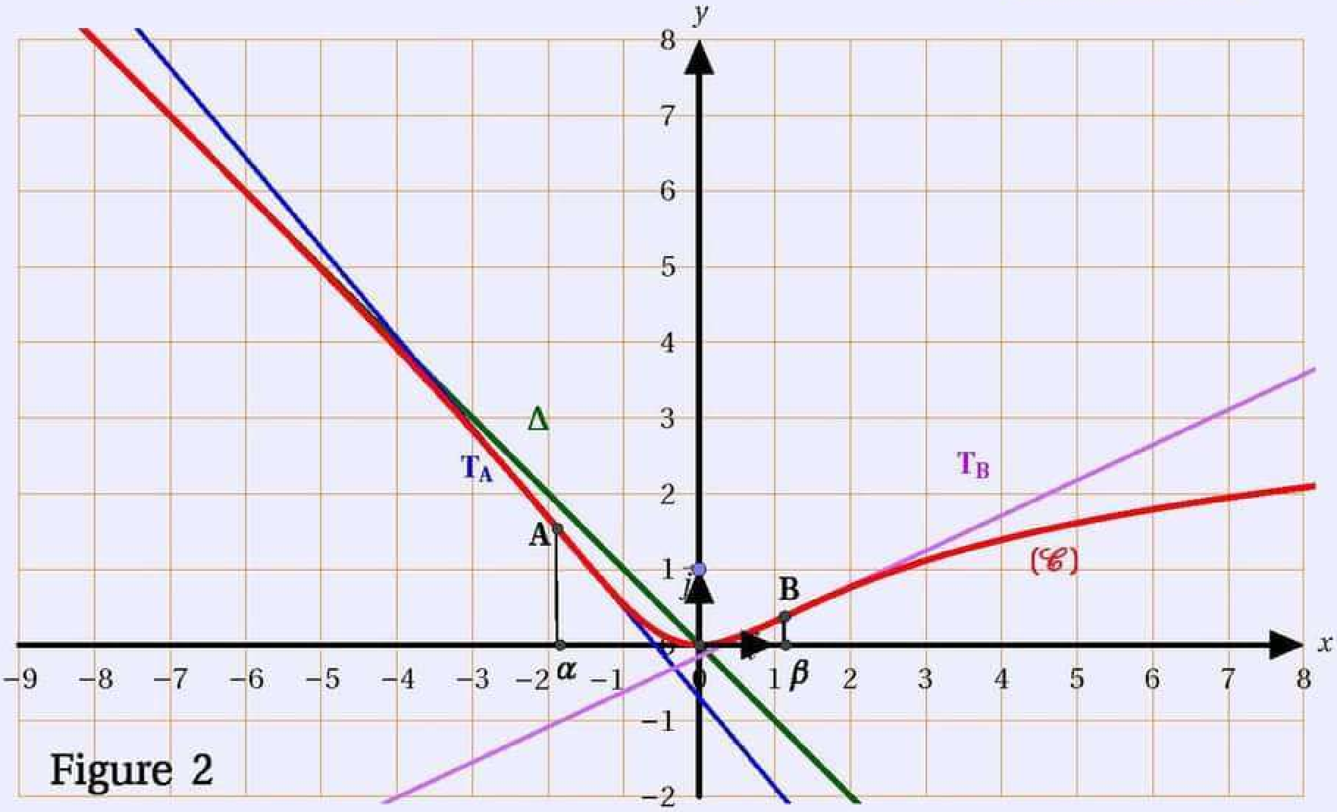


Figure 2