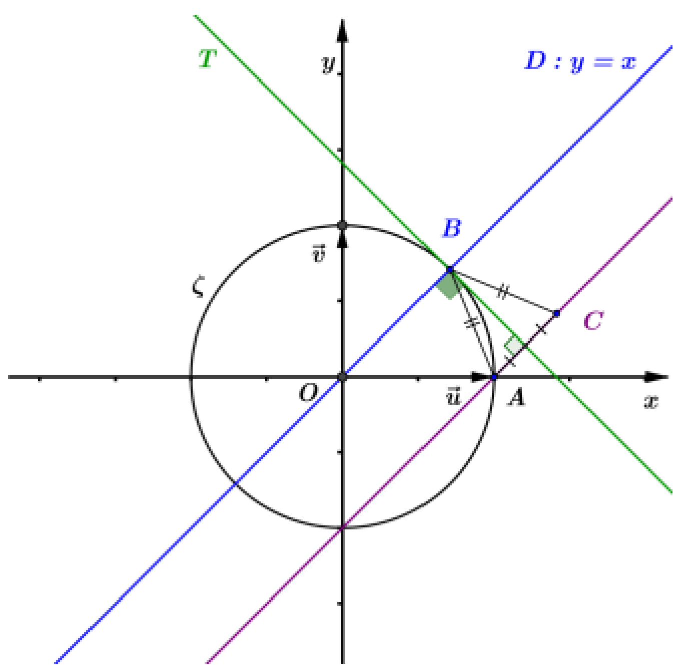
Exercice N°1: (4 points).			
Question		**Corrigé**	**Barème**
1)	a)	$(E): e^{i\frac{\pi}{4}}z^2 - \left(i + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)z + i = 0$ On a : $a = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $b = -i - e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $c = i$ $a + b + c = 0$ alors 1 est une solution de (E)	
	b)	Soit $z' = 1$ alors $z" = \frac{c}{a} = \frac{i}{e^{i\frac{\pi}{4}}} \Rightarrow z" = ie^{-i\frac{\pi}{4}}$ $z" = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow z" = e^{i\frac{\pi}{4}}$	
2)	a)	$1 + i = re^{i\theta}$ avec $r = \|1 + i\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\theta$ donc $\theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ainsi $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	
	b)	$z_C - z_A = 2e^{i\frac{\pi}{4}} - i - 1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = (2 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}} = (2 - \sqrt{2})z_B$ $z_O = 0$ alors $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_O} = 2 - \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ donc $(AC)//(OB)$	
3)	a)	$i(z_B - z_C) = ie^{i\frac{\pi}{4}} - 2ie^{i\frac{\pi}{4}} - 1 = -ie^{i\frac{\pi}{4}} - 1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} - 1 = \overline{e^{i\frac{\pi}{4}} - 1}$ $i(z_B - z_C) = \overline{z_B - z_A}$	
	b)	$\|i(z_B - z_C)\| = \|\overline{z_B - z_A}\| \Rightarrow \|z_B - z_C\| = \|z_B - z_A\|$ donc $BC = BA$ ainsi le triangle ABC est isocèle en B	
4)	a)	$OB = \|z_B\| = \left\|e^{i\frac{\pi}{4}}\right\| = 1$ d'où $B \in \zeta$	
	b)	T est la tangente à ζ en B donc $T \perp (OB)$ or $(AC)//(OB)$ d'où $T \perp (AC)$ d'ailleurs ABC est isocèle en B et $B \in T$ alors $T = med_{[AC]}$	
	c)	C est le symétrique de A par rapport à T 	

Exercice N°2: (5 points).			
Question		**Corrigé**	**Barème**
1)	a)	On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$	
	b)	$\vec{n}\neq\vec{0}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires alors A, B et C sont non alignés et par suite ils déterminent un plan. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $P \implies P: 2x-2y+2z+d=0$ Or $C(1,2,0)\in P$ alors $2-4+d=0\implies d=2$ $P: 2x-2y+2z+2=0$ ou encore $P: x-y+z+1=0$	
	c)	$\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\vec{n}$ donc $(IH)\perp P$ $x_H-y_H+z_H+1=\frac{1}{3}-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}+1=0$ donc $H\in P$ Et par suite H est le projeté orthogonal de I sur P	
2)	a)	$S: x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=1$ $\implies S: (x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(z^2-2z+1)=1+3$ $\implies S: (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4=2^2$ D'où S est la sphère de centre I et de rayon $R=2$	
	b)	$IA^2=0+2^2+0=4=R^2$ donc $A\in S$ $IB^2=(-2)^2+0+0=4=R^2$ donc $B\in S$	
	c)	$d=d(I,P)=IH=\frac{1}{3}\\|\vec{n}\\|=\frac{2\sqrt{3}}{3}<R$ donc S et P sont sécants suivant un cercle $\mathscr{C}$ de centre H et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{4-\frac{4}{3}}\implies r=\sqrt{\frac{8}{3}}$	
	d)	On a $(AB)\subset P$ et $\{A,B\}\subset S$ avec $S\cap P=\mathscr{C}\implies (AB)\cap\mathscr{C}=\{A,B\}$	
3)	a)	$Q: z-1=0$, $z_A-1=1-1=0$ et $z_B-1=1-1=0\implies (AB)\subset Q$ $z_C-1=0-1=-1\neq 0$ donc $C\notin Q$ ainsi P et Q sont sécants suivant la droite (AB)	
	b)	$IE^2=0+0+2^2=4=R^2$ donc $E\in S$	
	c)	$\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IM}=aa'+bb'+cc'=2(z-1)$ Alors $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IM}=0\iff 2(z-1)=0\iff z-1=0\iff M\in Q$	
4)		On a $I\notin S$ et $E\notin Q$ car $z_E\neq 1$ IEM est isocèle et rectangle en $I\iff\begin{cases}IM=IE\iff M\in S\\\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{IE}\iff M\in Q\\M\in P\end{cases}$ $\iff M\in P\cap Q\cap S$ $\iff M\in (AB)\cap S$ Cl : IEM est isocèle et rectangle en I $\iff M\in\{A,B\}$	

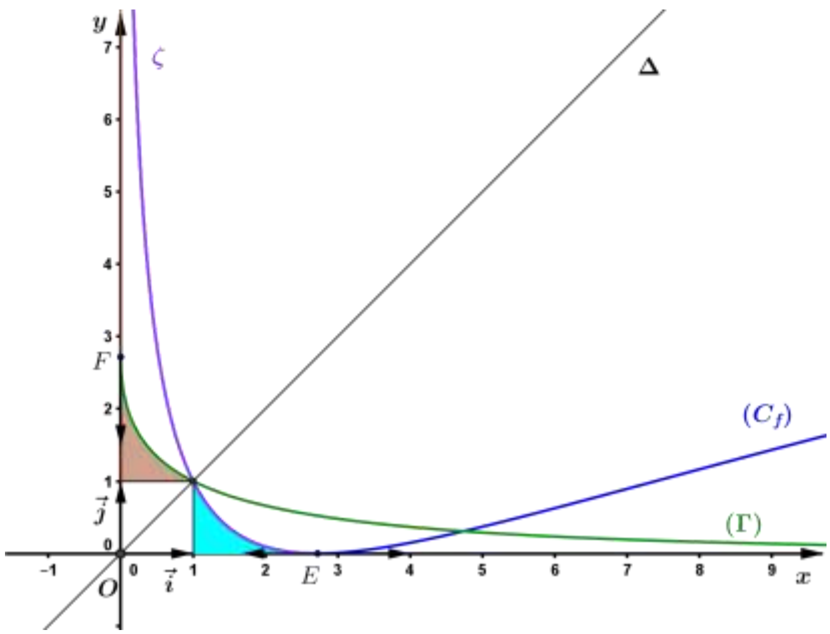
Exercice N°3: (4,5 points).			
Question		**Corrigé**	**Barème**
1)	a)	$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ • Soit P_n " $0 < u_n \leq 2$ " pour tout $n \in \mathbb{N}$ • Pour $n = 0$ on a : $0 < 1 = u_0 \leq 2 \Longrightarrow P_0$ est vraie • Supposons que P_n est vraie $(n > 0)$ c.à.d. $0 < u_n \leq 2$ • Montrons que P_{n+1} est vraie ? En effet : $0 < u_n \leq 2 \Longrightarrow 0 < 2u_n \leq 4 \Longrightarrow 0 < \sqrt{2u_n} \leq \sqrt{4}$ $\Longrightarrow 0 < u_{n+1} \leq 2$ d'où P_{n+1} est vraie • Cl : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < u_n \leq 2$	
	b)	• Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2u_n - u_n^2 = u_n(2 - u_n)$ • Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \geq 0$ et $2 - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1}^2 - u_n^2 \geq 0$ $\Longrightarrow u_{n+1}^2 \geq u_n^2$ d'où $u_{n+1} \geq u_n$ ainsi la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$	
	c)	(u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ et majorée par 2 donc elle est convergente. Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \Longrightarrow \ell \in [0\,,2]$ et on a : $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f: x \longmapsto \sqrt{2x}$ f est définie et continue sur $[0\,,+\infty[$ en particulier sur $[0\,,2]$ donc ℓ vérifie l'équation $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell = \sqrt{2\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 2\ell$ $\Leftrightarrow \ell^2 - 2\ell = 0 \Leftrightarrow \ell(\ell - 2) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 2$ Or (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ donc $\ell \geq (u_0 = 1)$ d'où $\ell = 2$	
2)		Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $v_{n+1} = \ln 2 - \ln u_{n+1} = \ln 2 - \ln\sqrt{2u_n}$ $v_{n+1} = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln(2u_n) = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln u_n = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln u_n$ $v_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln u_n) = \frac{1}{2}v_n$ avec $\frac{1}{2}$ réel constant. donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln 2 - \ln u_0 \Longrightarrow v_0 = \ln 2$	
3)	a)	Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ avec $q \neq 1$ donc $S_n = v_0 \frac{1-q^n}{1-q} = \ln 2 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \Longrightarrow S_n = 2\ln 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$	
	b)	$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\ln 2\left(1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{0}\right) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2\ln 2$	
	c)	On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2\ln 2 \in \mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0$ Et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln 2 - \frac{S_n}{n}} = e^{\ln 2} = 2$	

<table>
<tr><th colspan="4">Exercice N°4: (6,5 points).</th></tr>
<tr><th colspan="2">Question</th><th>Corrigé</th><th>Barème</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1)</td><td>a)</td><td>$f(x) = (\ln(x) - 1)^2 \quad ; \quad D_f =]0\,,+\infty[$
• $\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x \to 0^+} \Big(\underbrace{\ln(x) - 1}_{-\infty}\Big)^2 = +\infty$
• (C_f) admet une asymptote verticale d'équation : $x = 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{\ln(x) - 1}_{+\infty}\Big)^2 = +\infty$</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>• Pour tout $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{(\ln(x)-1)^2}{(\sqrt{x})^2} = \left(\frac{\ln(x)-1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$
• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{0}\right)^2 = 0$
• (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au $V(+\infty)$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2)</td><td>a)</td><td>f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a :
$f'(x) = 2(\ln(x) - 1)'(\ln(x) - 1) = \frac{2(\ln(x)-1)}{x}$</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln(x) - 1$ qui s'annule en e avec $f(e) = 0$
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>e</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>$\searrow$</td><td>0</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>3)</td><td>a)</td><td>$g(x) = f(x) - x \quad ; \quad D_g =]0\,,+\infty[$ donc $g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

b)

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	
position relative		(C_f) *est au dessus de* Δ	*point d'intersection*	(C_f) *est au dessous de* Δ	

4)



5) **a)**

x	0	e
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	$+\infty$ ↘	0

- h est strictement décroissante sur $]0\,,e] \Longrightarrow h$ est bijective
- h est continue sur $]0\,,e]$ et $h(]0\,,e]) = [0\,,+\infty[$
- Cl : h réalise une bijection de $]0\,,e]$ sur $[0\,,+\infty[$

b) Soit ζ la portion de (C_f) restreinte à $]0\,,e]$ alors $(\Gamma) = S_\Delta(\zeta)$

6)	a)	$\int_1^e f(x)dx = ?$; on pose $\begin{cases} u(x) = f(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = f'(x) \\ v(x) = x \end{cases}$ d'où $\int_1^e f(x)dx = [xf(x)]_1^e - \int_1^e xf'(x)\,dx = 0 - f(1) - \int_1^e xf'(x)\,dx$ ainsi $\int_1^e f(x)dx = -1 - \int_1^e xf'(x)\,dx$	
	b)	$\int_1^e xf'(x)\,dx = \int_1^e 2(-1+\ln x)\,dx = 2[-x + x.\ln(x) - x]_1^e$ donc $\int_1^e xf'(x)\,dx = 2[-2x + x.\ln x]_1^e = 2(-2e + e + 2 - 0) = 2(2-e)$	
	c)	Soit h^{-1} la fonction réciproque de h alors $A = \int_0^1 \lvert h^{-1}(x) - 1\rvert dx$ Par raison de symétrie par rapport à Δ $A = \int_1^e \lvert h(x)\rvert dx = \int_1^e f(x)dx = -1 - \int_1^e xf'(x)\,dx = -1 - 2(2-e)$ ainsi $\boldsymbol{A = 2e - 5}$ $(u.a.)$	